Chapitre 3
Réduction d'endomorphismes

Exercice 1 :

1. Montrons que φ est linéaire. Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(M+\lambda N) &= (M+\lambda N) + \mathrm{Tr}(M+\lambda N)\mathrm{I}_n \\ &= (M + \mathrm{Tr}(M)\cdot \mathrm{I}_n) + (N + \mathrm{Tr}(N)\cdot \mathrm{I}_n) \\ &= \varphi(M) + \lambda\varphi(N).\end{aligned}$$

On en déduit que φ est un endomorphisme.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nul tel que

$$\varphi(M) = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad M + \mathrm{Tr}(M)\mathrm{I}_n = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(M)\mathrm{I}_n = (\lambda - 1)M.$$

- Si $\lambda = 1$, alors M est une matrice de trace nulle. Réciproquement, si M est une matrice de trace nulle, on a $\varphi(M) = M$.
- Si $\lambda \neq 1$, alors M est une matrice scalaire et on trouve $\lambda = n+1$. Réciproquement, on a $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$.

Finalement $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, n+1\}$, $E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $E_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

Exercice 2 : Le scalaire $\lambda \in \mathrm{Sp}(D)$ si et seulement s'il existe $f \in E$ non nul tel que

$$D(f) = \lambda f \quad \Leftrightarrow \quad f' = \lambda f.$$

Or les solutions de cette équation différentielle sont les multiples de la fonction $t \mapsto \exp(\lambda t)$. Ainsi, l'équation admet toujours une solution non nulle. Finalement, on a $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(t \mapsto \exp(\lambda t))$.

Exercice 3 : On montre le résultat par double inclusion.

- Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(u)$. Il existe $x \in E$ non nul tel que $u^{-1}(x) = \mu x$. On a alors

$$x = u(u^{-1}(x)) = u(\mu x) = \mu u(x),$$

donc $\mu \neq 0$ et $u(x) = \mu^{-1}x$. Ainsi $\mu = \lambda^{-1}$ avec $\lambda = \mu^{-1} \in \mathrm{Sp}(u)$.

- Réciproquement si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il existe $x \in E$ avec $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. On a alors

$$x = u^{-1}(u(x)) = u^{-1}(\lambda x) = \lambda u^{-1}(x),$$

donc $\lambda \neq 0$ et $u^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$. Ainsi, $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(u)$.

Exercice 4 : On doit déterminer les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $AX = \lambda X$ est des solutions non nulles. L'équation se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& \lambda x \\ x+y &=& \lambda y \\ x+z &=& \lambda z \\ x+t &=& \lambda t \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& \lambda x \\ x+y &=& \lambda y \\ z-y &=& \lambda(z-y) \\ t-y &=& \lambda(t-y) \end{array}\right.$$

On peut distinguer deux cas.

- Si $\lambda = 1$, le système équivaut après simplification à

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z+t &=& 0 \\ x &=& 0 \end{array}\right.$$

qui admet des solutions non nulles, donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.

- Si $\lambda \neq 1$, le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda^2 - 2\lambda - 2)y &=& 0 \\ x &=& (\lambda-1)y \\ z &=& y \\ t &=& y. \end{array}\right.$$

Ce système admet des solutions non nulles si et seulement si

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Finalement, on a $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$. En procédant de même, on trouve

$$\mathrm{Sp}(B) = \left\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(C) = \left\{0, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}\right\} \quad .$$

Exercice 5 :

1. La matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{C}_3[X]$ est
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On en déduit que $\chi_\varphi(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_4 - M) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$.
2. On a $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 1\}$, $m_1(\varphi) = 2$ et $m_{-1}(\varphi) = 2$.
3. En utilisant M, on trouve
$$E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^3 + 1, X^2 + X), \quad E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X^2 - X).$$
Comme $\dim E_1(\varphi) + \dim E_{-1}(\varphi) = 4$, on en déduit que φ est diagonalisable.

Exercice 6 :

1. La linéarité ne pose pas de soucis. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc u est un endomorphisme.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$u(X^k) = \left(\frac{X+1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i = \frac{X^k}{2^k} + \cdots$$
On en déduit que la matrice de u dans la base canonique est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & (*) \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1/2^n \end{pmatrix}$$
3. Comme la matrice M est triangulaire, ces valeurs propres sont sur la diagonale, donc $\mathrm{Sp}(u) = \{1, 1/2, \ldots, 1/2^n\}$ et les valeurs propres sont simples.
4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$u((X-1)^k) = \left(\frac{X+1}{2} - 1\right)^k = \frac{1}{2^k}(X-1)^k,$$
donc $(X-1)^k \in E_{2^{-k}}(u)$. Comme chaque valeur propre est simple, on a $\dim E_{2^{-k}}(u) = 1$, donc $E_{2^{-k}}(u) = \mathrm{Vect}((X-1)^k)$.

Exercice 7 : Pour la matrice A, on a $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 4)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 2\}$. Comme χ_A est scindé à racines simples, la matrice A est diagonalisable. De plus, on a
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Pour la matrice B, on a $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. De plus, on a
$$E_1(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$
Comme $\dim E_1(B) + \dim E_2(B) = 3$, la matrice B est diagonalisable. On a $B = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pour la matrice C, on a $\chi_C(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Le discriminant du second facteur est strictement négatif, donc χ_C n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, C n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Pour la matrice A, on a $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$. De plus, on a

$$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim E_1(A) = 1 < 3 = m_1(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
Pour la matrice B, on a $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-j)(\lambda-\bar{j})$ où $j = (-1+i\sqrt{3})/2$. Comme χ_B est scindé à racines simples, la matrice B est diagonalisable. De plus, on a

$$E_1(B) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_j(B) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\\bar{j}\\j\end{pmatrix}, \quad E_{\bar{j}}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\j\\\bar{j}\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $B = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&\bar{j}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&\bar{j}&j\\1&j&\bar{j}\end{pmatrix}.$$

Pour la matrice C, on a $\chi_C(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-(1+i))(\lambda-(2+i))$. Comme χ_C est scindé à racines simples, la matrice C est diagonalisable. De plus, on a

$$E_2(C) = \text{Vect}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}, \quad E_{1+i}(C) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad E_{1+2i}(C) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $C = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1+i&0\\0&0&2+i\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix}-2&1&1\\3&-1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : Pour la matrice A_m, on a $\chi_{A_m}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-m)$. On en déduit que si $m \notin \{1,2\}$, alors le polynôme caractéristique de A_m est scindé à racines simples, donc A_m est diagonalisable. Pour $m=1$, on a

$$E_1(A_1) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim E_1(A_1) = 1 < 2 = m_1(A_1)$, on en déduit que A_1 n'est pas diagonalisable. Pour $m=2$, on a

$$E_2(A_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

On a $\dim E_2(A_2) = 2 = m_2(A_2)$ et $\dim E_1(A_2) = 1 = m_1(A_2)$, donc A_2 est diagonalisable. Finalement A_m est diagonalisable si et seulement si $m \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Pour la matrice B_m, on a $\chi_{B_m}(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-7)(\lambda-m)$. On en déduit que si $m \notin \{2,7\}$, alors le polynôme caractéristique de B_m est scindé à racines simples, donc B_m est diagonalisable. Pour $m=2$, on a

$$E_2(B_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a $\dim E_2(B_2) = 2 = m_2(B_2)$ et $\dim E_7(B_2) = 1 = m_7(B_2)$, donc B_2 est diagonalisable. Pour $m=7$, on a

$$E_7(B_7) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On a $\dim E_7(B_7) = 2 = m_7(B_7)$ et $\dim E_2(B_7) = 1 = m_2(B_7)$, donc B_7 est diagonalisable. Finalement, la matrice B_m est diagonalisable pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 : La polynôme caractéristique de R_θ est $\lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = -4\sin^2(\theta)$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $\Delta = 0$, i.e $\theta = 0[\pi]$. Dans ces cas, on a $R_\theta = \pm \mathrm{I}_2$. Ainsi, la matrice R_θ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi $\theta = 0[\pi]$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a déjà vu que R_θ est diagonalisable si $\theta = 0[\pi]$. Dans les autres cas, on a $\Delta < 0$, donc le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjugués (et distinctes), donc R_θ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Finalement, R_θ est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 11 : On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \cdot 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$.

Exercice 12 :

1. On a $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. On note $\Delta = \mathrm{Diag}(1, -2)$. On a $\Delta^3 = D$, donc
$$B = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
vérifie $B^3 = P\Delta^3 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Exercice 13 : L'endomorphisme v est diagonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ doit diagonale. Si l'on note $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, alors il existe $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_i^2 = \alpha_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On considère l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\Delta = \mathrm{Diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Comme $\Delta^2 = D$, on a $u^2 = v$.

Exercice 14 : On a $J = PDP^{-1}$ avec

$$D = \mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 8)$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 8\}$. De plus, on a
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_8(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$
Comme $\dim(E_1(A)) = 2 < 3 = m_1(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On cherche une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$AV_1 = 0, \quad AV_2 = V_1, \quad AV_3 = 8V_3.$$
Ainsi, on choisit $V_1 \in E_0(A)$, $V_3 \in E_8(A)$ et $V_2 \in \mathbb{R}^3$ avec $AV_2 = V_1$. On peut prendre
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A = PTP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -11 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 :

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. De plus, on a
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$
Comme $\dim(E_1(A)) = 2 < 3 = m_1(A)$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. On cherche une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$AV_1 = V_1, \quad AV_2 = V_2, \quad AV_3 = V_2 + V_3.$$
Ainsi, on choisit $V_1, V_2 \in E_1(A)$ de sorte qu'il existe $V_3 \in \mathbb{R}^3$ avec $(A - \mathrm{I}_3)V_3 = V_2$. On peut prendre
$$V_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$
Ainsi, on a $A = PTP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

3. On a
$$A^n = PT^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & n\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1-n & -n\\0 & n & n+1\end{pmatrix}.$$

Exercice 17 : La matrice A est trigonalisable, donc il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Les éléments diagonaux de T sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ de A. De plus, on a $A^2 = PT^2P^{-1}$ et les éléments diagonaux de T^2 sont $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ et ce sont aussi les valeurs propres de A^2. Finalement
$$\mathrm{Sp}(A^2) = \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\} = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

Exercice 18 : On a

(i) $u_n = 2^{2-n} - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $u_n = 2^n(1-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $u_n = (5-3n)3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iv) $u_n = 5 \cdot 3^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 3^{n-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(v) $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(vi) $u_n = 2\cos\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.